Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebieten

Diplomarbeit bei Prof. Dr. Marlis Hochbruck
AG Numerik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

David Hipp

18.1.2014

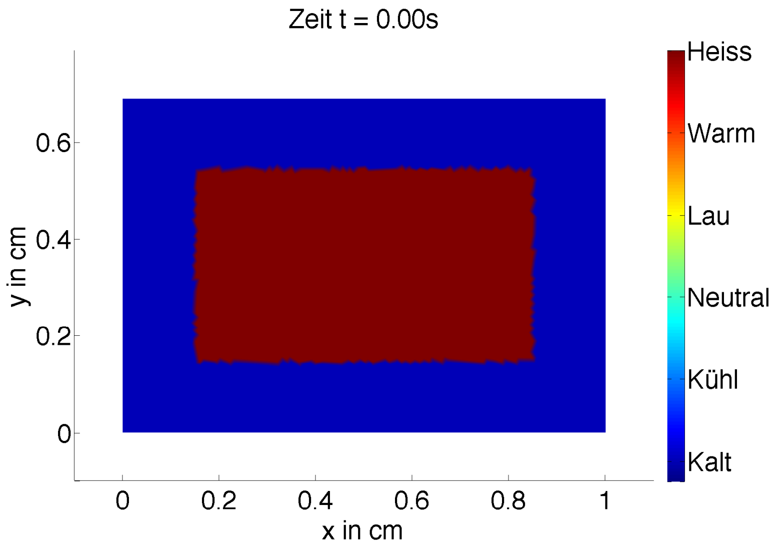
Aufgabenstellung

Simulation von Wärmeleitung auf sich verformenden Gebiet

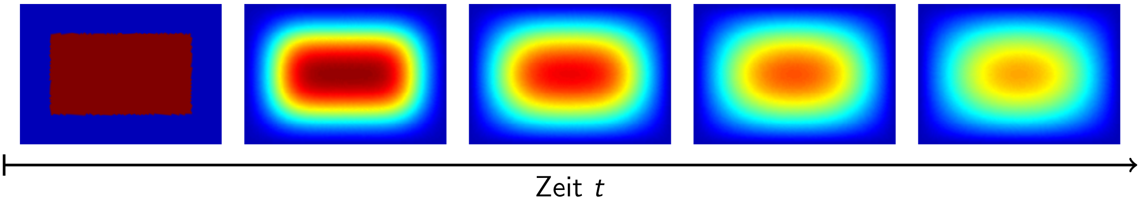
Aufgabenstellung

Simulation von Wärmeleitung auf sich verformenden Gebiet

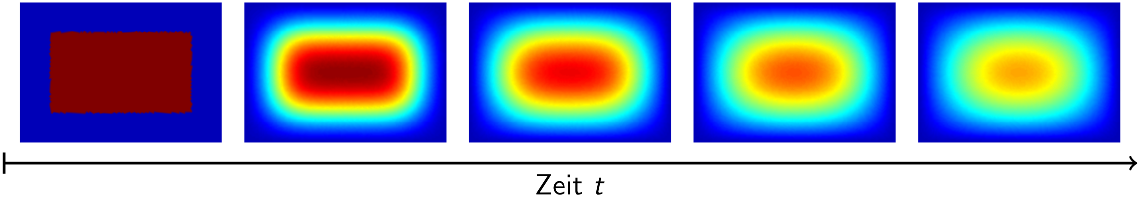
Beispiel für Wärmeleitung



Wärmeleitungsgleichung



Wärmeleitungsgleichung

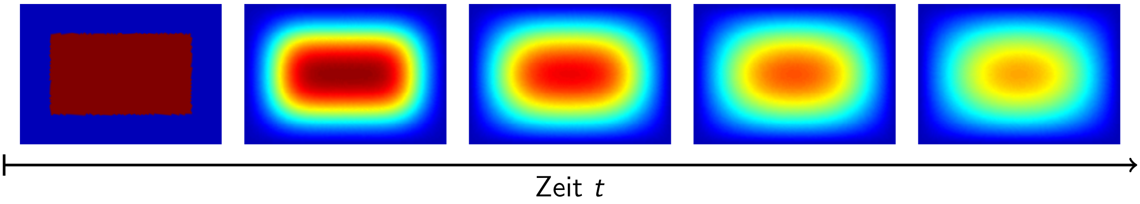


Modellierung

Zusammenhang zwischen

- zeitlicher Änderung der Temperatur
- räumlicher Änderung der Temperatur

Wärmeleitungsgleichung



Modellierung

Zusammenhang zwischen

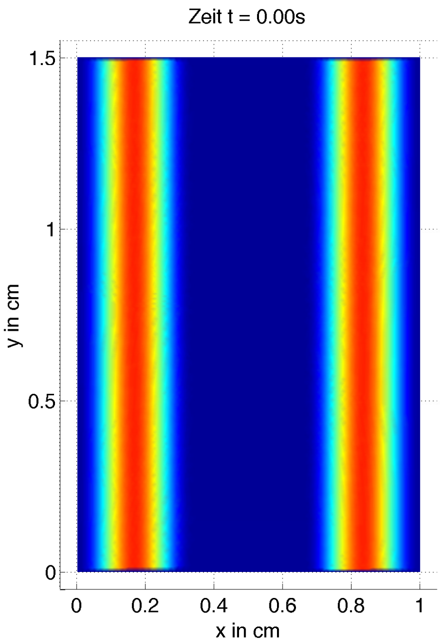
- zeitlicher Änderung der Temperatur
- räumlicher Änderung der Temperatur

Mathematisch: Partielle Differentialgleichung

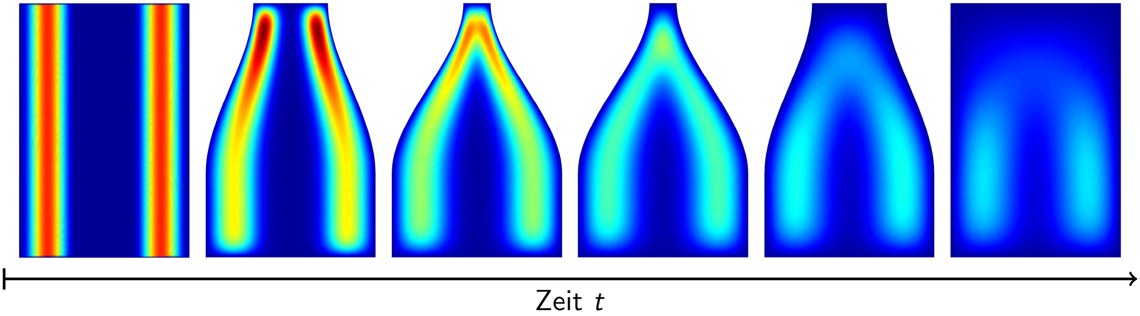
$u(t, x, y)$ Temperatur zur Zeit t am Ort (x, y)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y)$$
$$u(0,x,y) = u_0(x,y)$$

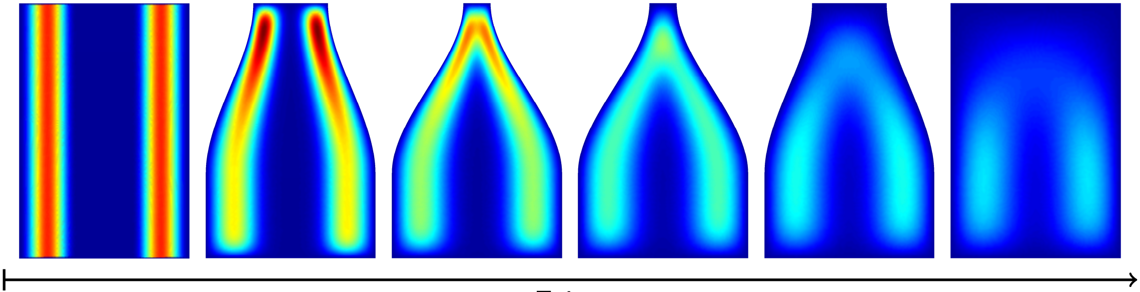
Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet



Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet



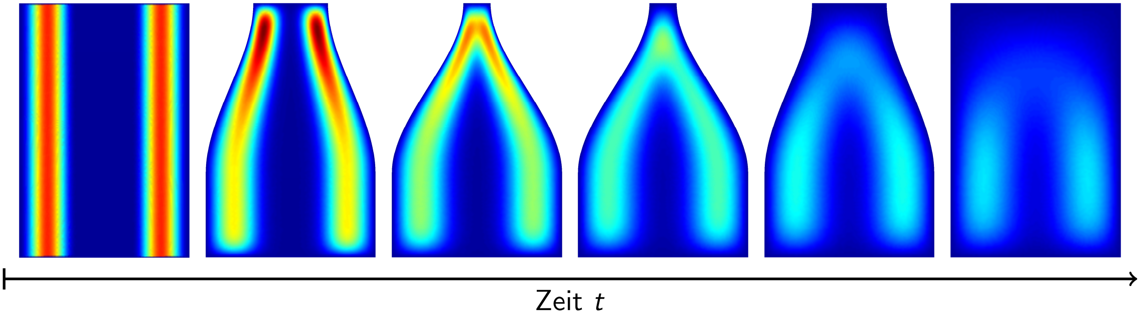
Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet



Auftretende Effekte

- Verteilungsprozess (Diffusion)

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet



Auftretende Effekte

- Verteilungsprozess (Diffusion)
- Verdichtung

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung?

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig?

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig? ✓

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig? ✓
- Lösungsformel?

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig? ✓
- Lösungsformel? ✗ Existiert, aber für praktische Berechnung unbrauchbar

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Mathematische Fragestellungen

- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig? ✓
- Lösungsformel? ✗ Existiert, aber für praktische Berechnung unbrauchbar

Numerische Mathematik

"Konstruktion, Analyse und Implementierung von mathematischen Methoden zur Berechnung von Lösungen."

Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

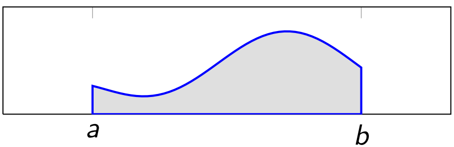
Mathematische Fragestellungen

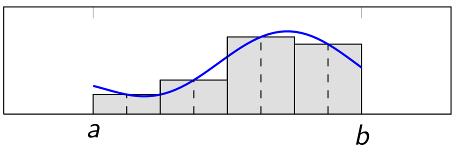
- Gibt es eine Lösung? ✓
- Ist diese Lösung eindeutig? ✓
- Lösungsformel? ✗ Existiert, aber für praktische Berechnung unbrauchbar

Numerische Mathematik

"Konstruktion, Analyse und Implementierung von mathematischen Methoden zur Berechnung von Lösungen."

Beispiel: Integration



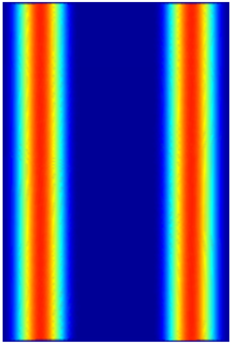


"Diskretisierung"

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

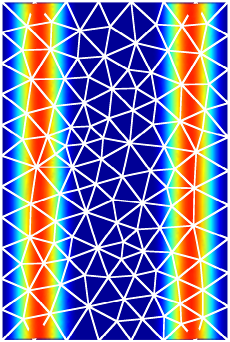
Räumliche Diskretisierung: Grundidee

∞-viele Punkte



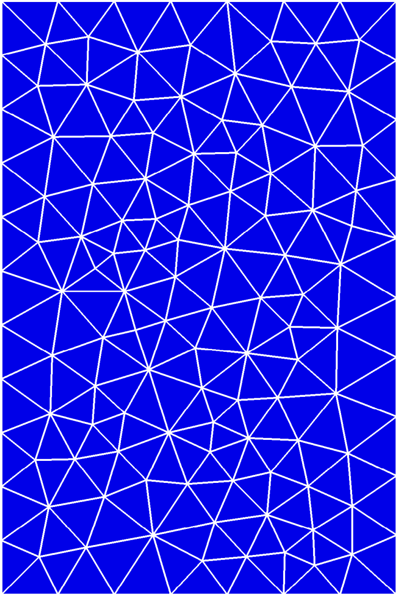
Triangulierung $\longrightarrow$

endlich-viele Punkte

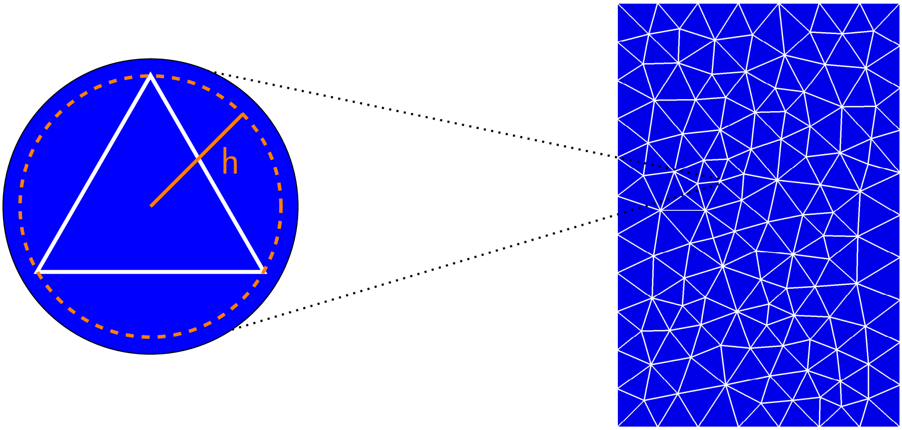


Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Räumliche Diskretisierung



Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet



Satz (Motiviert durch Dziuk/Elliot 2007)

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| u - u_h^l \right\|_{0,\Omega_t}^2 + \int_0^T \left\| \nabla(u - u_h^l) \right\|_{0,\Omega_t}^2 \, dt$$

$$\leq ch \, \|u_0\|_{2,\Omega_0}^2 + ch^2 \, \|u_0\|_{2,\Omega_0}^2 + ch^4 \, \|u_0\|_{2,\Omega_0}^2 + ch^2 \int_0^T \|D_t u\|_{2,\Omega_t}^2 \, dt$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Verallgemeinerung der zeitlichen Entwicklung

- Lösung von $u'(t) = -3u(t)$

$$u(t) = e^{-3t}u(0)$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Verallgemeinerung der zeitlichen Entwicklung

- Lösung von $u'(t) = -3u(t)$

$$u(t) = e^{-3t}u(0)$$

- Lösung von $u'(t) = -Au(t)$

$$u(t) = e^{-tA}u(0)$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

Verallgemeinerung der zeitlichen Entwicklung

- Lösung von $u'(t) = -3u(t)$

$$u(t) = e^{-3t}u(0)$$

- Lösung von $u'(t) = -Au(t)$

$$u(t) = e^{-tA}u(0)$$

- Lösung von $u'(t) = -A(t)u(t)$

$$u(t) = \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(s)}R(s,0)\,ds\right)u(0)$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

$$u(t) = \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(s)} R(s,0)\, ds \right) u(0)$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

$$u(t) = \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(s)} R(s,0)\, ds \right) u(0)$$

Zeitliche Diskretisierung

$$u(0,x,y) \longrightarrow \boxed{\text{Numerisches Zeitschrittverfahren}} \longrightarrow u(t,x,y)$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

$$u(t) = \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(s)} R(s,0)\, ds \right) u(0)$$

Zeitliche Diskretisierung

$$u(0,x,y) \longrightarrow \boxed{\text{Numerisches Zeitschrittverfahren}} \longrightarrow u(t,x,y)$$

Numerisches Zeitschrittverfahren

$$\begin{aligned} e^{-(t-s)A(s)} &\approx e^{-(t-s)A(0)} \\ R(s,0) &\approx p(s) \end{aligned}$$

Simulation der Wärmeleitungsgleichung auf sich verformenden Gebiet

$$u(t) = \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(s)} R(s,0)\, ds \right) u(0)$$

Zeitliche Diskretisierung

$$u(0,x,y) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Numerisches}\\ \text{Zeitschrittverfahren}\end{array}} \longrightarrow u(t,x,y)$$

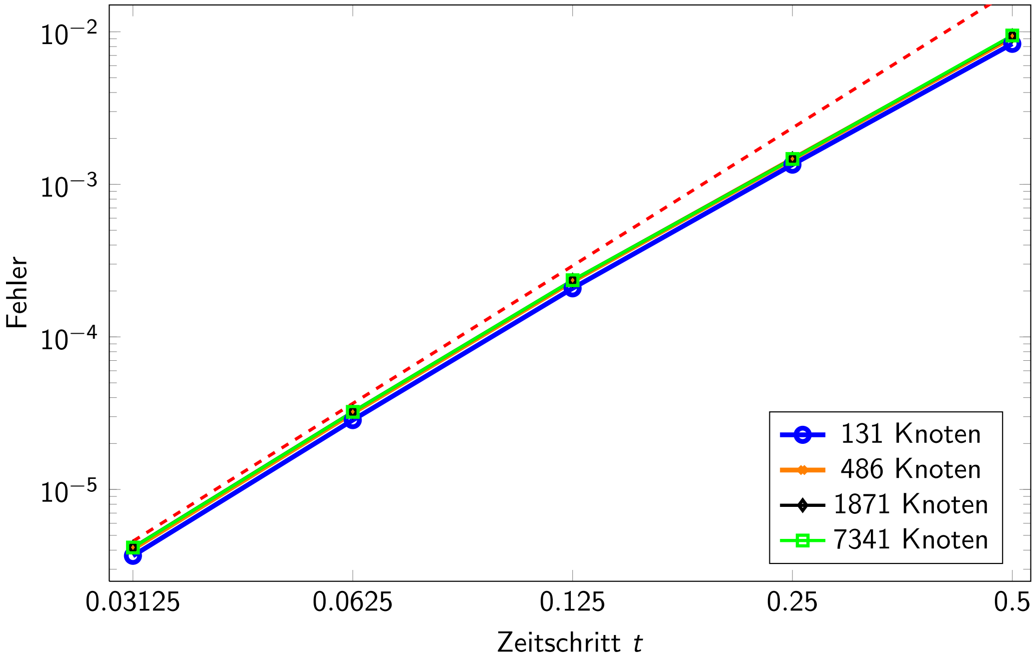
Numerisches Zeitschrittverfahren

$$\begin{aligned} e^{-(t-s)A(s)} &\approx e^{-(t-s)A(0)} \\ R(s,0) &\approx p(s) \end{aligned}$$

$$u(t) \approx \left(e^{-tA(0)} + \int_0^t e^{-(t-s)A(0)} p(s)\, ds \right) u(0)$$

Hipp, Hochbruck, Ostermann, Oberwolfach Report 2012

Numerische Tests



Promotion

Beweis: Stabilität und Konvergenz

$$\|u(t_n) - u_n\| \leq C\tau^3 \big(1 + |\log\tau|\big)^2 \left(\max_{t\in[0,T]} \|u'(t)\| + \max_{t\in[0,T]} \|u''(t)\| \right)$$

Promotion

Beweis: Stabilität und Konvergenz

$$\|u(t_n) - u_n\| \leq C\tau^3 \big(1 + |\log \tau|\big)^2 \left(\max_{t \in [0,T]} \|u'(t)\| + \max_{t \in [0,T]} \|u''(t)\| \right)$$

Neue Numerische Tests